ACADEMIA JC

C/ PRINCESA, 70 (1ª PLANTA)

A solo **3 MIN** del intercambiador de Moncloa

Metro Moncloa, Argüelles

Estamos en la Academia Paraninfo. Pregunta en la secretaría del primer piso en qué aula se imparte tu curso.

TEL
Politécnica

GRADO EN **INGENIERÍA** DE TECNOLOGÍAS Y SERVICIOS DE **TELECOMUNICACIÓN**

1ER CURSO

¡¡te ayudamos con tus **asignaturas!!**

Mira las **asignaturas que ofertamos por curso** para todo el cuatrimestre.
También se darán intensivos cuando se acerquen los parciales y los finales.

Comenzamos el lunes 16

CÁLCULO	IACR (Introducción al Análisis de Circuitos)
Lunes **10.30 a 13.00**	**Miércoles** (Grupo de mañana): **11.45 a 14.15** **Miércoles** (Grupo de tarde): **15.15 a 17.45**
FÍSICA I	**ÁLGEBRA**
Lunes **13.30 a 16.00**	**Miércoles** **17.45 a 20.15**

¡¡Conócenos!!
¿No estás seguro al 100% de apuntarte?

Ven **gratis** a la **1ª clase** y así verás nuestra forma de preparar las asignaturas y cuáles te pueden interesar más

compromiso JC
Si vienes por curso a una asignatura tendrás **gratis** los **intensivos** para los parciales. *¡Pregúntanos!*

¡¡Matricúlate de **2 asignaturas y la 3ª te saldrá gratis!!**
Mira las condiciones en la siguiente hoja

3x2

Más info ?

De 9.00 a 18.30
De lunes a viernes

91 535 75 29
INFO@ACADEMIAJC.COM

24 horas al día
365 días al año

ACADEMIAJC.COM

LECCIÓN 3. Bases de un espacio vectorial

Idea. Las bases constituyen el *idioma* en el que se expresan los espacios vectoriales. Permiten dar un *nombre* a los vectores del espacio (las coordenadas) haciéndolos más manejables y permitiendo su tratamiento matricial.

Veamos cómo se llega hasta la noción de base.

Sistemas de generadores. Consideremos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathcal{P}_2[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que 2 en la variable x. Los vectores de este espacio, son polinomios de la forma $p_1 = x^2+2x-1$, $p_2 = x+1$ ó $p_3 = -x^2 - 19$.

Todos los polinomios anteriores se pueden escribir como *un número por* x^2 *más un número por* x *más un número por 1*:

$$p_1 = \mathbf{1} \cdot x^2 + \mathbf{2} \cdot x + (\mathbf{-1}) \cdot 1$$
$$p_2 = \mathbf{1} \cdot x^2 + \mathbf{0} \cdot x + \mathbf{1} \cdot 1$$
$$p_3 = (\mathbf{-1}) \cdot x^2 + \mathbf{0} \cdot x + (\mathbf{-19}) \cdot 1$$

Puesto que todos los polinomios pueden expresarse como combinación lineal de los elementos del conjunto $\{x^2, x, 1\}$, se dice que dicho conjunto es un **sistema generador** de V.

¿Es único? Consideremos ahora el conjunto $\{x^2, x+1, x, 1\}$. Los polinomios anteriores pueden expresarse también como combinación de sus elementos. En efecto,

$$p_1 = \mathbf{1} \cdot x^2 + \mathbf{0} \cdot (x+1) + \mathbf{2} \cdot x + (\mathbf{-1}) \cdot 1$$
$$p_2 = \mathbf{1} \cdot x^2 + \mathbf{0} \cdot (x+1) + \mathbf{0} \cdot x + \mathbf{1} \cdot 1$$
$$p_3 = (\mathbf{-1}) \cdot x^2 + \mathbf{0} \cdot (x+1) + \mathbf{0} \cdot x + (\mathbf{-19}) \cdot 1$$

Por tanto, $\{x^2, x+1, x, 1\}$ también es un sistema generador. Fijémonos ahora en el segundo de los polinomios anteriores. Podemos expresarlo de una segunda forma:

$$p_2 = \mathbf{0} \cdot x^2 + \mathbf{1} \cdot (x+1) + \mathbf{0} \cdot x + \mathbf{0} \cdot 1$$

Esto supone un inconveniente, pues el hecho de tener dos formas de expresar la misma información puede dar lugar a confusión. Nos interesaría encontrar un conjunto que nos permita expresar cada vector de manera única.

Observamos que el problema anterior ha surgido al añadir un cuarto vector al conjunto generador que teníamos. Parece, entonces, razonable tratar de reducir al mínimo el número de vectores del sistema generador, pero sin que pierda su capacidad de representar a todos los elementos del espacio vectorial.

Dependencia e independencia lineal. Como hemos visto, al añadir un cuarto vector al sistema generador, hemos introducido la posibilidad de expresar un mismo vector de múltiples formas diferentes: al añadir un vector, estamos dando a nuestro sistema más información de la que necesita. Matemáticamente, el sistema ha perdido la **independencia lineal**.

Diremos que un conjunto de vectores es **linealmente dependiente** cuando uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás. En el primer ejemplo que hemos utilizado, esto no era posible; sin embargo, en el segundo teníamos que

$$x + 1 = \mathbf{0} \cdot x^2 + \mathbf{1} \cdot x + \mathbf{1} \cdot 1$$

Si queremos volver a la situación cómoda que teníamos al principio, es necesario que eliminemos todos los elementos linealmente dependientes de nuestro conjunto. Así, llegamos a la noción de base.

Base. Un conjunto de vectores de un espacio vectorial V es una **base** si verifica:

1. Es sistema generador.
2. Es linealmente independiente.

Las bases tienen la buena propiedad de generar el sistema vectorial y, además, de hacerlo de manera única, por lo que cumplen todo lo que estábamos buscando

El conjunto $\{x^2, x, 1\}$ verifica ambas condiciones, por tanto, es una base. En cambio, $\{x^2, x+1, x, 1\}$ no es linealmente independiente, y de ahí nuestros problemas. Igualmente, podemos encontrar conjuntos que no verifiquen la primera propiedad: por ejemplo, el conjunto $\{x^2, 1\}$ no es sistema generador, pues es imposible expresar el polinomio $x-3$ como combinación de sus elementos.

Coordenadas. Una vez fijada una base, cada vector se expresa de manera única como combinación de sus elementos. Gracias, precisamente, a esta unicidad, podemos identificar a cada vector con los coeficientes que aparecen en su expresión. Estos coeficientes son las **coordenadas** del vector en la base dada.

Siguiendo con los ejemplos que estábamos tratando, sea la base $\mathcal{B} = \{x^2, x, 1\}$. Las coordenadas de p_1, p_2, p_3 son:

$$p_1 = \mathbf{1}\cdot x^2 + \mathbf{2}\cdot x + (\mathbf{-1})\cdot 1 \equiv (1, 2, -1)$$
$$p_2 = \mathbf{1}\cdot x^2 + \mathbf{0}\cdot x + \mathbf{1}\cdot 1 \equiv (1, 0, 1)$$
$$p_3 = (\mathbf{-1})\cdot x^2 + \mathbf{0}\cdot x + (\mathbf{-19})\cdot 1 \equiv (-1, 0, -19)$$

Veremos que hay formas mucho más eficientes de comprobar si las dos condiciones de la definición de base se verifican. Hasta que las aprendamos, podemos hacerlo como en el siguiente ejemplo:

Cuestión 65. (Diciembre, 2014) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2, simétricas y con coeficientes reales, las coordenadas de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ respecto a la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ son $\vec{\boldsymbol{M}}_B = (\square, \square, \square)$.

Expresando la matriz M como combinación lineal de los elementos de la base, tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}$$

Comparando la primera matriz de la línea anterior con la última, obtenemos directamente que $x = 1$, $y = 1$ y $z = 2$. Por tanto, las coordenadas de M son $\vec{\boldsymbol{M}}_B = (1, 1, 2)$.

ACADEMIA JC

C/ PRINCESA, 70 (1ª PLANTA)

A solo **3 MIN** del intercambiador de Moncloa

Metro Moncloa, Argüelles

Estamos en la Academia Paraninfo. Pregunta en la secretaría del primer piso en qué aula se imparte tu curso.

GRADO EN INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS Y SERVICIOS DE TELECOMUNICACIÓN

¡¡te ayudamos con tus **asignaturas!!**

¿Conoces las ventajas de ser alumno de JC?

3x2

3ª asignatura gratis

Es muy frecuente apuntarse a 2 asignaturas. Si es ese tu caso, podrás asistir **totalmente gratis a otra asignatura más**. ¡¡Podemos ayudarte con las materias más complicadas!!

Compromiso JC

Por ser alumno de una de nuestras asignaturas desde el principio de curso **podrás asistir también, sin ningún coste, al intensivo** que ofertemos para preparar el parcial . Te puede venir muy bien para repasar conceptos y hacer algún ejercicio más.

Tutorías y atención

Además de las dudas de clase tenemos un sistema de **atención presencial** para aclarar aquellos conceptos que no te hayan quedado de todo claro, y también **atención remota mediante email o whatsapp**. ¡¡Lo más importante es que entiendas la asignatura perfectamente!!

La experiencia

En la Academia JC impartimos diferentes grados de ingeniería de la UPM y nuestros profesores son especialistas en las materias que enseñan.

Estamos muy cerca

Muy cerca del intercambiador de Moncloa y junto al Metro Argüelles. Estamos muy bien comunicados en transporte público.

@jc_ingenieria_arquitectura Academia JC

¡¡Coge tu móvil y síguenos!!

Estarás al día con todas las noticias de JC y, además, podrás participar en los sorteos y llevarte algún que otro regalo

Más info ?

De 9.00 a 18.30
De lunes a viernes

91 535 75 29
INFO@ACADEMIAJC.COM

24 horas al día
365 días al año

ACADEMIAJC.COM